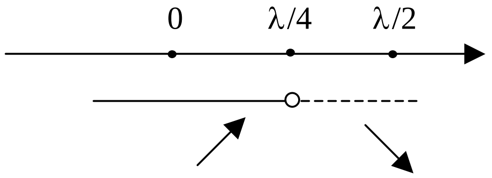
*PROBLEMA 1*

a) indicate con $x$ e con $\frac{\lambda}{2}-x$ le dimensioni dell'aiuola, con le limitazioni $0\le x\le\frac{\lambda}{2}$, la funzione che ne esprime l'area è:

$$A(x)=x\cdot\left(\frac{\lambda}{2}-x\right)=\frac{\lambda}{2}x-x^2 .$$

Per la ricerca del massimo si studia il segno della derivata prima $A'(x)=\frac{\lambda}{2}-2x$.

Si ha:




Si ha la massima area per $x=\frac{\lambda}{4}$.

Poiché la funzione rappresentativa è un polinomio di secondo grado il massimo relativo è anche massimo assoluto.
Allo stesso risultato si poteva giungere in modo diretto considerando che si tratta di un problema simmetrico e che il valore estremo si ha nel centro della simmetria. È noto infatti che fra tutti i rettangoli di dato perimetro il quadrato è quello di area massima.

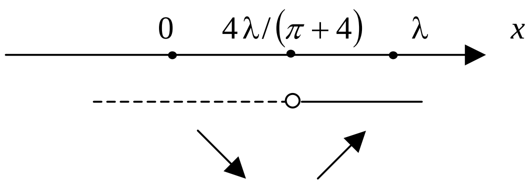
b) Indicate rispettivamente con $x$ e con $\lambda-x$ le due parti in cui è suddiviso il filo, con le limitazioni $0\le x\le\lambda$, le aree dell'aiuola circolare e dell'aiuola quadrata sono, rispettivamente:

$$A_C(x)=\frac{(\lambda-x)^2}{4\pi} \quad \text{e} \quad A_Q(x)=\frac{x^2}{16}$$

essendo $\frac{\lambda-x}{2\pi}$ ed $\frac{x}{4}$, rispettivamente raggio e lato del quadrato. La somma delle aree è:

$S(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(\lambda-x)^2}{4\pi}$ e risulta $S'(x)=\frac{x}{8}-\frac{\lambda-x}{2\pi}$

Dallo studio del segno di $S'(x)$ si ha:




Pertanto il minimo di $S(x)$ si ha per $x=\frac{4\lambda}{\pi+4}$ e, poiché la funzione $S(x)$ è un polinomio di 2° grado, tale valore è anche minimo assoluto.

c) L’eventuale massimo di $S(x)$, per la natura di tale funzione, può essere solo in corrispondenza degli estremi dell’intervallo.

Si ha $S(0)=\frac{\lambda^2}{4\pi}$ e $S(\lambda)=\frac{\lambda^2}{16}$. Il massimo richiesto si ha in un estremo, cioè per $x=0$, quando cioè tutto il filo viene utilizzato per l’aiuola circolare.

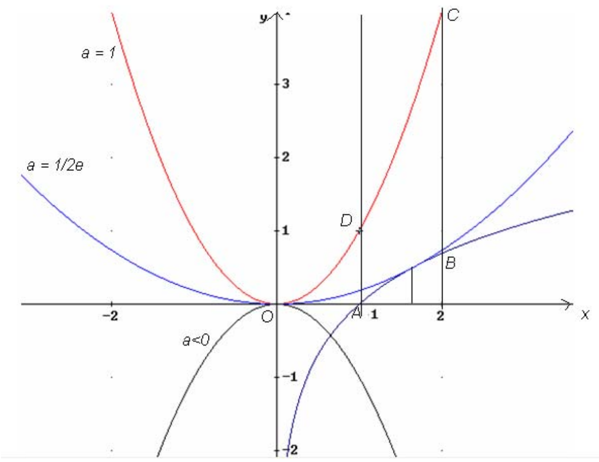
Indicate $a$, $b$, $c$ le dimensioni di un parallelepipedo rettangolo, il suo volume è $V=a\cdot b\cdot c$. Aumentando del 10% ogni dimensione il volume risulta $V_1=(1{,}1)^3 a\cdot b\cdot c=1{,}331V$. L’aumento è dunque del 33,1%.

*PROBLEMA 2*

1. La condizione di tangenza tra le due funzioni impone che sia:

$$\begin{cases}\log x = ax^2\\ \frac{1}{x}=2ax\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2x^2}\\ \log x=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{e}\\ a=\frac{1}{2e}\end{cases}$$

   Essendo $x=\sqrt{e}$ l’ascissa del punto di tangenza.
   Le soluzioni dell’equazione $\log x = ax^2$ sono le ascisse dei punto di intersezione delle due funzioni
   Per $a<0$ l’equazione $\log x = ax^2$ ha sempre una ed una sola soluzione.
   Per $a=0$ la g($x$) è l’asse $x$ e quindi una sola soluzione.
   Per $0<a\le\frac{1}{2}$ si hanno due soluzioni.




2. $Area(ABCD)=\int_1^2 (x^2-\log x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-[x\log x - x]_1^2=\frac{10}{3}-2\log 2$

3. Scelto, ad esempio $a = \frac{1}{2}$ si ottiene $h(x) = \log x - \frac{1}{2}x^2$ definita per $x > 0$.

Dai risultati acquisiti al punto 1, la $h(x)$ è ovunque negativa.

Poiché $x^2$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\log x$ si ha:

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$ ;

e poiché $x^2$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $\log x$ si ha:

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ ;

Le derivate $h'(x) = \frac{1}{x} - x$ e $h''(x) = -\frac{1}{x^2} - 1$ evidenziano un punto di massimo in $\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ e l'assenza di flessi poiché $h''(x)$ è ovunque negativa.

*QUESTIONARIO*

1. La somma $S$ dei chicchi di grano è data dalla somma dei primi 64 termini di una progressione geometrica di primo termine1, di ragione $q = 2$. Risulta pertanto $S = \sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^{64} - 1$. Trattandosi di un problema concreto procediamo con criteri di approssimazione. Intanto possiamo assumere $S \cong 2^{64}$. Sapendo che $2^{10} = 1024$ può essere approssimato con $10^3$, si ha: $2^{64} = 2^{10} \cdot 2^{54} \cong 10^3 \cdot 2^{54}$. Il peso totale in grammi è $\frac{10^3 \cdot 2^{54}}{10^3} 38 = 38 \cdot 2^{54}$. Per avere il peso in tonnellate si deve dividere questo numero per $10^6 \cong 2^{20}$. Si ha pertanto che il grano richiesto pesa circa $\frac{38 \cdot 2^{54}}{2^{20}} = 38 \cdot 2^{34}$ tonnellate. Anche ricorrendo al calcolo logaritmico si possono calcolare le approssimazioni richieste.

2. La superficie di un poliedro regolare è costituita da poligoni regolari tutti dello stesso tipo e in ogni vertice di ciascun angolo solido concorre lo stesso numero di poligoni. È dunque necessario che la somma degli angoli che concorrono in vertice sia minore di 360°. Si hanno così i seguenti casi possibili.
   a. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre triangoli equilateri (somma 180°) si ha il **tetraedro** (quattro facce)
   b. nel vertice dell'angolo solido concorrono quattro triangoli equilateri (somma 240°) si ha il l'**ottaedro** (otto facce)
   c. nel vertice dell'angolo solido concorrono cinque triangoli equilateri (somma 300°) si ha l'**icosaedro** (venti facce). Sei triangoli danno 360° e non formano angolo solido.
   d. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre quadrati (somma 270°) si ha l'**esaedro** o **cubo** (sei facce). Quattro quadrati danno 360° e non formano angolo solido
   e. nel vertice dell'angolo solido concorrono tre pentagoni (somma 324°) si ha il **dodecaedro** (dodici facce). Quattro pentagoni danno 432° e non formano angolo solido.

   I cinque poliedri regolari sono anche detti *solidi platonici*.

3. Posto AB = $x$ BC = $y$, si ha: A'B'= $x - 4$ B'C'= $y - 8$

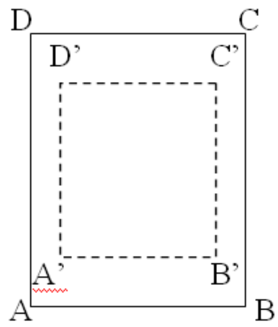
Si ha, con riferimento alla figura a lato,
$z$ = area(ABCD) = $xy$

e  area(A'B'C'D') = ($x$–4)($y$–8)=50 da cui $y = \frac{50}{x-4} + 8$ che

sostituito in $z$ dà:

$z = 2x\left(\frac{25}{x-4} + 4\right)$   da cui  $z' = 8\frac{x^2 - 8x - 9}{(x-4)^2}$

Studiando il segno della derivata prima si ha l'area minima richiesta per $x = 9cm$ e $y = 18cm$




4. La diagonale $d$ del cubo è data dal diametro della sfera. Pertanto lo spigolo del cubo è $\lambda = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ed il suo volume $V = \frac{\sqrt{3}}{9} m^3$. Poiché $1m^3 = 1000 litri$, la capacità del serbatoio è circa 192,45 *litri*.

5. Si ha $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ Ponendo nella formula $a = b = 1$ si ottiene $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

6. Il quesito conduce sistema misto parametrico:

$$\begin{cases} \cos 2x = \dfrac{5k-2}{k} \\ 0 < \cos 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{con} \quad 30° < 2x < 90°$$

Pertanto il sistema ammette una soluzione per i valori di $k$ che soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{5k-2}{k} > 0 \\ \dfrac{5k-2}{k} < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{cioè per } \frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$$

7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ è un polinomio di 3° grado, ovunque continua e derivabile, pertanto le condizioni poste dal teorema sono verificate. Essendo $f'(x) = 3x^2 - 2x$, il valore $\xi$ richiesto è soluzione dell'equazione $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ ovvero $3\xi^2 - 4\xi + 1 = 0$. Le soluzioni di tale equazione sono $\xi_1 = \frac{1}{3}$ e $\xi_2 = 1$. Per le condizioni poste dal teorema la seconda non è accettabile.

8. Si perché la funzione $f(x) = tgx$ presenta una discontinuità nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ interno all'intervallo. La funzione $f(x) = tgx$ assume valore 1 $\frac{\pi}{4}$ e poi fino a $x = \frac{\pi}{2}$ (escluso ) è sempre crescente. Oltre il $x = \frac{\pi}{2}$ e fino a $x = \frac{3\pi}{4}$ è crescente, ma il suo valore massimo è $-1$.

9. La funzione richiesta è la funzione $f(x) = e^x$

10. Le condizioni poste conducono al seguente sistema lineare nelle incognite *a* e *b*

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases} \text{ la cui soluzione è } \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

Prof. Gianfranco Pistoni Liceo scientifico Archimede
Prof. Ferrucio Rohr  Liceo scientifico Nomentano