Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2007/2008

Nicola Gigli*   Sunra J.N. Mosconi†

19 giugno 2008

Problema 1

(a) Determiniamo in funzione di a i lati del triangolo. Essendo l'angolo $B\hat{C}A$ retto è subito determinato l'angolo $A\hat{B}C = \pi - \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ e dalla trigonometria otteniamo

$$\begin{cases} AB = a \\ AC = a \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a}{2} \\ BC = a \cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Occorre che il punto Q giaccia all'interno del segmento BC. Distando esso x da B, deve valere $x \leq a\sqrt{3}/2$. Occorre anche che il punto R giaccia all'interno del segmento AC. Distando esso $a - x$ da A deve valere $a - x \leq a/2$. In definitiva la costruzione è possibile se e solo se

$$\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(b) Calcoliamo l'area del quadrilatero mistilineo per sottrazione dall'area del triangolo. Essendo quest'ultimo rettangolo, si ha subito che l'area è $\overline{AC}\,\overline{BC}/2$ ossia $a^2\sqrt{3}/8$. L'area dei due settori circolari ARP e BPQ si ottiene ricordando che l'area di un settore circolare di raggio r ed angolo θ è $r^2\theta/2$. Si ha quindi

$$\text{Area}(ARP) = (a-x)^2 \frac{\pi}{6} \qquad \text{Area}(BQP) = x^2 \frac{\pi}{12}$$

*ex perfezionando Scuola Normale Superiore
†dottorando università di Catania

da cui

$$\begin{aligned} S(x) = & \text{Area}(PQCR) \\ = & \text{Area}(ABC) - \text{Area}(ARP) - \text{Area}(BQP) \\ = & \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}(a-x)^2 - \frac{\pi}{12}x^2 \end{aligned}$$

il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Calcolando la derivata si ha

$$S'(x) = \frac{\pi}{3}(a-x) - \frac{\pi}{6}x$$

che si annulla nel solo punto $x = 2a/3$, interno all'intervallo $[a/2, \sqrt{3}a/2]$. Quest'ultimo è quindi un punto di massimo, e quindi l'area massima è

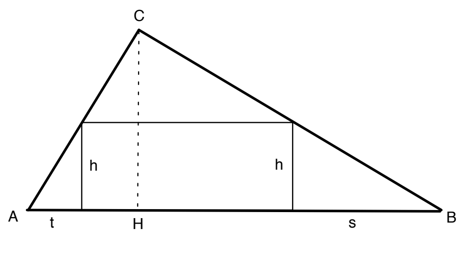
$$S\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{9}\right)$$

L'area minima sarà quindi uno dei due valori agli estremi $S(a/2)$, $S(\sqrt{3}a/2)$ ossia rispettivamente

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right).$$

Poichè il secondo è il più piccolo dei due, esso è il minimo di S nell'intervallo di compatibilità della costruzione.

(c) Detta h l'altezza del generico rettangolo, t la distanza da A dell'estremo sinistro della base e s la distanza da B dell'estremo destro della base,



si ha

$$\begin{cases} \dfrac{h}{t} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \\ \dfrac{h}{s} = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Quindi la base del rettangolo sarà espressa come funzione della sua altezza da

$$a - t - s = a - \frac{h}{\sqrt{3}} - h\sqrt{3}$$

e l'area sarà

$$\text{Area} = h\left(a - \frac{4}{\sqrt{3}}h\right)$$

Questa espressione descrive una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice nel punto di ascissa $h = \frac{\sqrt{3}}{8}a$. Il valore massimo si otterrà quindi calcolando l'area per quest'ultimo valore di h, ottenendo

$$\text{Area massima} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

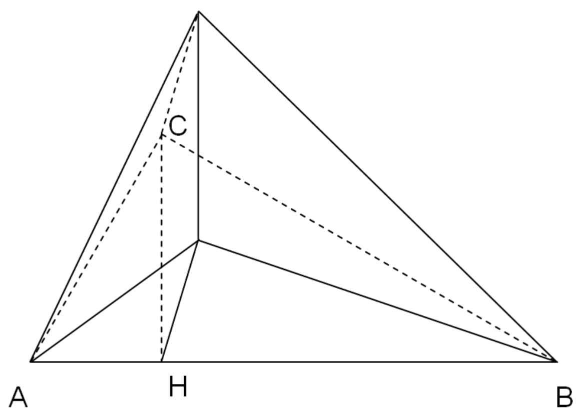
(d) Utilizzando il principio di Cavalieri calcoliamo il volume del solido integrando, al variare della distanza t da A del piano perpendicolare ad AB, l'area della sezione. Essendo la sezione un quadrato basterà determinare un lato di esso. Sia H il piede della perpendicolare per C ad AB: si ha che

$$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{4} \qquad \overline{HB} = a - \overline{AH} = \frac{3}{4}a$$

Se ora il piano perpendicolare ad AB ha distanza t da A, con $t \leq \overline{AH}$, un lato del quadrato risulterà essere l'altezza del rettangolo del punto precedente quando l'estremo sinistro disti t da A, e quindi di lunghezza $\sqrt{3}t$. Analogamente se la distanza s da B del piano è minore di $\overline{HB}$, il lato del quadrato sarà l'altezza del rettangolo del punto precedente quando l'estremo destro disti s da B, e quindi ha lunghezza $\frac{s}{\sqrt{3}}$.
Il volume riulterà quindi

$$\int_0^{\frac{a}{4}} (\sqrt{3}t)^2 dt + \int_0^{\frac{3a}{4}} \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 ds = \frac{a^3}{16}$$

Riportiamo la figura del solido in esame.



Problema 2

(a) Riferiamo il problema ad un sistema di assi cartesiani, in modo che il punto C sia l'origine, l'asse x contenga il segmento AB e il semicerchio Γ sia contenuto nel semipiano dei punti con ordinata maggiore o uguale a zero. In questo sistema di riferimento, la semicirconferenza γ che delimita Γ è data dal grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$ definita sull'intervallo $[-1,1]$. Affermiamo ora che il centro C_1 di Γ_1 è il punto $(0,1)$: infatti, poiché Γ_1 è tangente in C a AB, e poiché il raggio CC_1 è ortogonale alla retta tangente, sappiamo che C_1 giace sull'asse delle ordinate. Poiché inoltre sappiamo che il raggio di Γ_1 è 1, e che la figura è tutta contenuta nel semipiano dei punti con ordinata positiva, ne deduciamo che $C_1 = (0,1)$. La semicirconferenza γ_1 che delimita Γ_1 è quindi data dal grafico della funzione $1-\sqrt{1-x^2}$, definita su $[0,1]$. Le due semicirconferenze γ e γ_1 si intersecano nei punti x tali che $\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-x^2}$, ovvero in $x = \pm\sqrt{3}/2$. L'area A_{int} dell'intersezione dei due cerchi è dunque data dall'integrale:

$$\begin{aligned}A_{int} &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left|\sqrt{1-x^2} - (1-\sqrt{1-x^2})\right| dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\sqrt{1-x^2} - 1\, dx \\ &= -\sqrt{3} + 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Ponendo $x = \sin t$ e cambiando variabile all'interno dell'integrale otteniamo (si osservi che per i fattori differenziali vale l'uguaglianza $dx = \cos t dt$):

$$A_{int} = -\sqrt{3} + 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t\, dt.$$

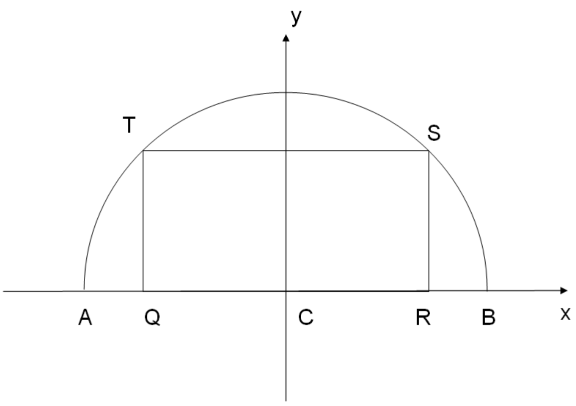
Ricordando che vale l'identità $\cos^2 t = (\cos(2t) + 1)/2$ otteniamo

$$A_{int} = -\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2t)\, dt.$$

Una primitiva della funzione $\cos(2t)$ è data dalla funzione $\sin(2t)/2$, dunque l'area è data da

$$A_{int} = -\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+\left(\frac{\sin(2\pi/3)}{2} - \frac{\sin(-2\pi/3)}{2}\right) = -\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Consideriamo un generico rettangolo inscritto in Γ. A meno di una rotazione di centro C, possiamo supporre che esso abbia i lati paralleli agli assi cartesiani. Inoltre, a meno di ingrandire i lati (operazione che fa aumentare l'area), possiamo supporre che uno dei due lati giaccia sul segmento AB e che il suo punto medio sia C. Dunque nella ricerca del rettangolo di area massima possiamo limitarci a considerare i rettangoli $QRST$ (con i vertici ordinati in senso antiorario) per cui il lato QR giaccia su AB ed abbia centro in C.



Detta x la lunghezza del segmento RS, abbiamo che la lunghezza di QR è $2\sqrt{1-x^2}$, e dunque l'area di $QRST$ è pari a $2x\sqrt{1-x^2}$. La derivata di tale funzione è

$$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

che è positiva per $x < 1/\sqrt{2}$ e negativa per $x > 1/\sqrt{2}$. Ne segue che la funzione assume il suo massimo in $x = 1/\sqrt{2}$ e, per quanto detto prima, che il rettangolo corrispondente è l'unico rettangolo di area massima tra quelli inscritti in Γ. Le coordinate dei suoi veritici sono: $Q = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $R = (1/\sqrt{2}, 0)$, $S = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $T = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(c) I due triangoli sono rettangoli in H, dunque la loro area è data dal semiprodotto delle lunghezze dei loro cateti. Indicando con $\overline{PH}$ la lunghezza del segmento PH, abbiamo $\overline{PH} = \sin x$; similmente $\overline{HC} = |\cos x|$ (la presenza del valore assuluto è necessaria, in quanto per $\pi/2 < x \leq \pi$ il coseno è negativo, e quindi non può rappresentare la lunghezza di un segmento), e $\overline{AH} = 1 + \cos x$. Dunque otteniamo le equazioni

$$S_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \sin x, \qquad S_2(x) = \frac{1}{2}|\cos x| \sin x.$$

Il rapporto di tali aree è dato da

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|}. \tag{1}$$

(d) La funzione definita dall'equazione (1) ha come dominio l'insieme degli x per cui il denominatore è diverso da zero: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Calcolando i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x \to \pi/2 + k\pi} f(x) = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

in quanto il denominatore tende a zero dall'alto, e il numeratore tende a 1.
Osserviamo ora che la funzione è periodica di periodo 2π, quindi per studiarne il grafico è sufficiente restringersi all'intervallo $(-\pi/2, 3\pi/2)$.
Possiamo riscrivere la funzione f come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\[2ex] -\dfrac{1 + \cos x}{\cos x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2), \end{cases}$$

La derivata prima è data da

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\[2ex] -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2), \end{cases}$$

essa è minore di zero negli intervalli $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, \pi)$ - in questi intervalli f è decrescente - e maggiore di zero in $(0, \pi/2)$ e $(\pi, 3\pi/2)$ - in questi intervalli f è crescente. Ne deduciamo, in particolare, che f ha due minimi relativi

nell'intervallo $(-\pi/2, 3\pi/2)$: i punti $x = 0$ e $x = \pi$, per i quali abbiamo $f(0) = 1$ e $f(\pi) = 0$.
La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ \\ -\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

È di immediata verifica che essa è strettamente maggiore di 0 in tutto il suo dominio. Ne segue che f è convessa in entrambi gli intervalli $(-\pi/2, \pi/2)$ e $(\pi/2, 3\pi/2)$ e che non ci sono flessi.
Riportiamo qui di seguito un grafico riassuntivo dell'andamento di f.