Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2010/2011

Nicola Gigli* Sunra J.N. Mosconi†

23 giugno 2011

Problema 1

1. (a) *Studio di f*
Il dominio di f è $\mathbb{R}$, e vale

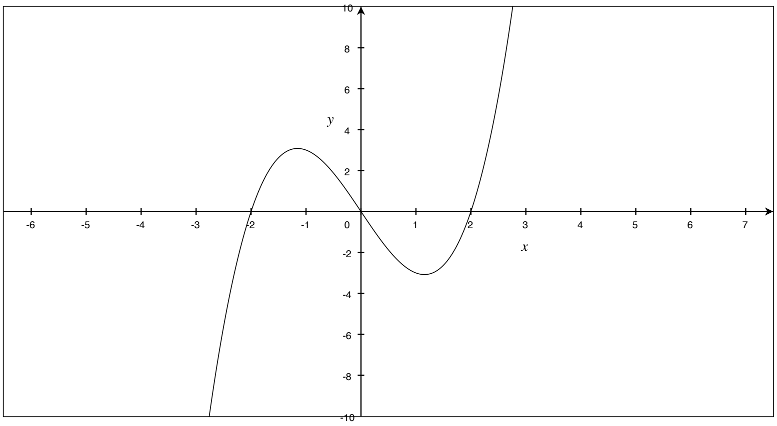
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Il segno di f si ottiene fattorizzando il polinomio come $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, ed è quindi positivo in $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, negativo in $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ e nullo in $x = -2, 0, 2$. La derivata é

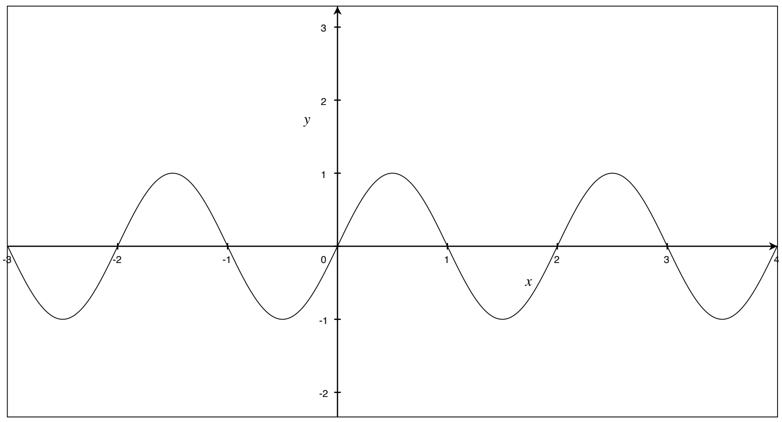
$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

che risulta quindi negativa in $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ (che é quindi l'insieme di decrescnza), positiva in $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$ (zona di crescenza) e nulla in $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. La funzione quindi ha un massimo locale in $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e un minimo locale in $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, di ordinate rispettivamente $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ e $-\frac{16}{3\sqrt{3}}$.
La derivata seconda di f è data da $f''(x) = 6x$, ed è quindi positiva in $(0, \infty)$, negativa in $(-\infty, 0)$ e si annulla in 0. Ciò significa che f è concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, \infty)$ e $x = 0$ è l'unico punto di flesso.
Il grafico di f è il seguente

*Università di Nizza
†Università di Catania



(b) *Studio di g*
Il grafico di g è un'omotetia di ragione $\frac{1}{\pi}$ e centro l'origine del grafico della funzione $\sin x$. La funzione si annulla sugli interi, ed ha massimi globali in $x = \frac{1}{2} + 2k$ e minimi globali in $x = \frac{3}{2} + 2k$, di ordinata rispettivamente 1 e -1, dove $k \in \mathbb{Z}$ è un intero arbitrario. Negli intervalli del tipo $[2k, 2k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, la funzione g è concava, e negli intervalli $[2k-1, 2k]$ convessa.
Il grafico di g è il seguente



2. Per determinare le ascisse dei punti d'intersezione basta risolvere

$$x^3 - 4x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x + 3 = 0$$

Una soluzione di trova per tentativi ed è $x = 1$. Sfruttando la regola di Ruffini si fattorizza allora il polinomio come

$$x^3 - 4x + 3 = (x-1)(x^2 + x - 3),$$

ed il fattore di secondo grado ha radici

$$x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Le ascisse dei punti d'intersezione sono quindi 1 e $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

I punti a tangente orizzontale di G_g si ottengono risolvendo $g'(x) = \pi \cos \pi x = 0$, che fornisce $\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ovvero $x = \frac{1}{2} + k$. Le ordinate dei punti d'intersezione sono 1 quando k è pari, e -1 quando k è dispari. Nell'intervallo delle ascisse $x \in [-6, 6]$ si hanno quindi i seguenti punti a tangente orizzontale:

$$(\pm\frac{1}{2}, \pm 1), \quad (\pm\frac{3}{2}, \pm 1), \quad (\pm\frac{5}{2}, \pm 1), \quad (\pm\frac{7}{2}, \pm 1), \quad (\pm\frac{9}{2}, \pm 1), \quad (\pm\frac{11}{2}, \pm 1).$$

3. Mostriamo innanzitutto che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$.

   Questo è certamente vero per motivi di segno in $[0, 1]$.

   In $[1, \frac{3}{2}]$ entrambe le funzioni sono convesse, avendo derivata seconda

$$f''(x) = 6x, \qquad g''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

   sempre positiva in $[1, \frac{3}{2}]$. Nei punti $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ la f è minore di -1, quindi lo è per convessità in tutto $[1, \frac{3}{2}]$, mentre $g \geq -1$ sempre.

   Per dimostrare che $f(x) \leq g(x)$ in $[\frac{3}{2}, 2]$ cominciamo col dimostrare che $f'(x) \geq g'(x)$ in $[\frac{3}{2}, 2]$. A questo fine dividiamo l'analisi negli intervalli $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ e $[\frac{5}{3}, 2]$. In $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ si ha

$$g'(x) = \pi \cos \pi x \leq \pi \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \leq \frac{11}{4} = f'(\frac{3}{2}) \leq f'(x),$$

   essendo (per convessitá), crescenti sia g' che f'. Mentre per $x \in [\frac{5}{3}, 2]$ si ha

$$g'(x) = \pi \cos \pi x \leq \pi \leq \frac{13}{3} = f'(\frac{5}{3}) \leq f'(x).$$

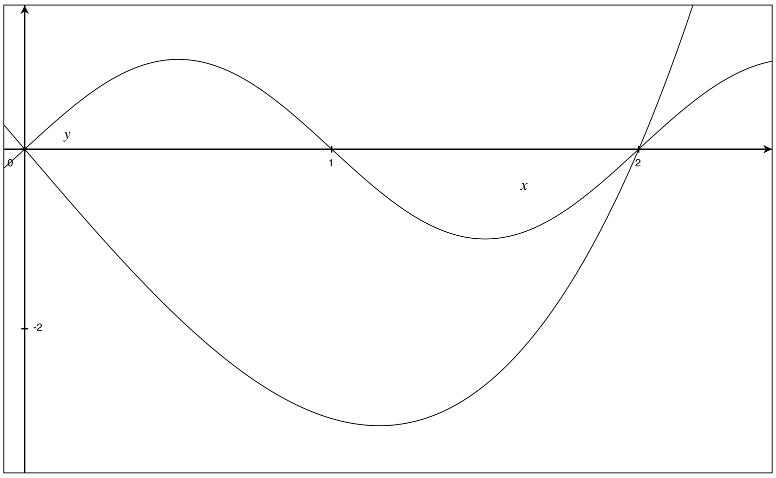
   Abbiamo quindi mostrato che per $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ vale

$$g'(x) \leq f'(x). \tag{1}$$

Osservando ora che $f(2) = g(2) = 0$ abbiamo per $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ la disuguaglianza

$$\begin{aligned} f(x) = f(2) - \int_x^2 f'(y)\,dy &= -\int_x^2 f'(y)\,dy \\ \overset{(1)}{\leq} -\int_x^2 g'(y)\,dy &= g(2) - \int_x^2 g'\,dy = g(x). \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo mostrato che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$. La regione R è descritta nella figura seguente



Ergo possiamo calcolarne l'area R come

$$\begin{aligned} \text{Area}(R) &= \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 \sin \pi x\,dx - \int_0^2 x^3 - 4x\,dx \qquad (2) \\ &= \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4. \end{aligned}$$

4. Il volume V del liquido si può calcolare mediante il principio di Cavalieri, integrando in x l'area della sezione della vasca S_x a distanza x dall'asse delle ordinate. Questa, per ipotesi, è un rettangolo di altezza $h(x) = 3 - x$ e base $g(x) - f(x)$, la cui area è quindi

$$\text{Area}(S_x) = (3 - x)(\sin \pi x - x^3 + 4x).$$

Il volume V sarà dato quindi dall'integrale

$$\int_0^2 (3-x)(\sin \pi x - x^3 + 4x)dx = 12 - \int_0^2 x \sin \pi x dx + \int_0^2 x^4 - 4x^2 dx, \quad (3)$$

avendo sfruttato la (2) per ottenere

$$\int_0^2 3(\sin \pi x - x^3 + 4x)dx = 3 \int_0^2 \sin \pi x - x^3 + 4x \, dx = 3 \cdot 4.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali a secondo membro della (3). Per il primo addendo, un'integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \sin \pi x dx &= \left[x \frac{-\cos \pi x}{\pi}\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{\cos \pi x}{\pi} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} - \left[\frac{-\sin \pi x}{\pi^2}\right]_0^2 = -\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

mentre per il secondo

$$\int_0^2 x^4 - 4x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{64}{15}.$$

Inserendo nella formula sopra per il volume si ha

$$V = 12 + \frac{2}{\pi} - \frac{64}{15} \simeq 8,370 \text{ metri cubi.}$$

Poiché un metro cubo è pari a mille litri, il volume della vasca è pari a circa 8370 litri.

Problema 2

Osserviamo che la funzione f è ben definita su tutta la retta reale per ogni valore di a, b.

1. Poiché $f(0) = b+3$, la condizione $f(0) = 2$ implica $b = -1$. La derivata di $f(x) = (ax-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è data da

$$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{ax-1}{3}e^{-\frac{x}{3}} = e^{-\frac{x}{3}}\left(a - \frac{ax-1}{3}\right).$$

Osserviamo che $e^{-\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ergo affinché la derivata si annulli in $x = 4$ deve valere

$$a - \frac{4a-1}{3} = 0,$$

che implica $a = 1$. Con tale scelta di a abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(4-x),$$

e dunque vale $f'(x) < 0$ per $x > 4$ e $f'(x) > 0$ per $x < 4$, quindi f è crescente in $(-\infty, 4)$ e decrescente in $(4, \infty)$, il che vuol dire che ha il massimo assoluto in $x = 4$.

2. Sappiamo già che $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è ben definita su tutta la retta reale, che è crescente in $(-\infty, 4)$ e decrescente in $(4, \infty)$. Calcoliamo i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$. Ricordando che

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{3}} = +\infty,$$

e che

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-\frac{x}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{\frac{x}{3}}} = 0, \tag{4}$$

(che segue, ad esempio, dalla regola di de l'Hôpital), abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 3.$$

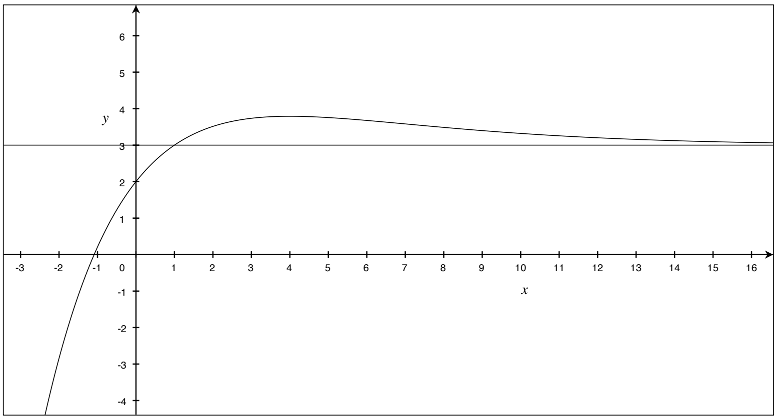
In particolare, f ha l'asintoto orizzontale $y = 3$, e, poiché per $x > 4$ è decrescente, a tale asintoto si avvicina dall'alto.

Conosciamo già l'andamento di $f'(x)$, passiamo quindi allo studio di $f''(x)$. Abbiamo

$$f''(x) = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(4-x) - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(4-x+3) = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(7-x).$$

Dal fatto che $\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che il segno della derivata seconda coincide col segno dell'espressione $-(7-x) = x - 7$. Quindi abbiamo che $x = 7$ è l'unico punto di flesso di f, che $f''(x) > 0$ in $(7, +\infty)$ (che quindi è la regione di convessità di f) e $f''(x) < 0$ in $(-\infty, 7)$ (che quindi è la regione di concavità di f).

Il grafico di f è quindi dato da:



3. La prima cosa da verificare è se il grafico Γ di f interseca la retta $y = 3$ nella regione $x \geq 0$. Ponendo $f(x) = 3$ si deduce $(x-1)e^{\frac{x}{3}} = 0$, da cui $x = 1$ (unica soluzione, perchè $e^{\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Poiché f è crescente in $[0, 1]$, ne deduciamo che $f(x) \leq 3$ per $x \in [0, 1]$. D'altro canto, poiché f è crescente in $[1, 4]$ e decrescente in $[4, +\infty)$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, ne deduciamo che

$$f(x) \geq 3 \qquad \text{quando} \qquad x \geq 1. \tag{5}$$

Da questo possiamo dedurre che l'area cercata è uguale a [1]

$$\text{Area} = \int_0^1 3 - f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x) - 3\, dx.$$

Si noti che il secondo di questi integrali è indefinito, il suo valore essendo dato da $\int_1^{+\infty} f(x) - 3\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x) - 3\, dx$.

Per procedere con il calcolo dobbiamo trovare una primitiva di $f(x) - 3 = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$. A questo proposito, cominciamo ricordando che una primitiva di $e^{-\frac{x}{3}}$ è data da $-3e^{-\frac{x}{3}}$.

Per calcolare $\int (x-1)e^{-\frac{x}{3}}\, dx$ ricorriamo alla formula di integrazione per parti ottenendo

$$\begin{aligned}\int f(x) - 3\, dx = \int (x-1)e^{-\frac{x}{3}}\, dx &= -3(x-1)e^{-\frac{x}{3}} - \int -3e^{-\frac{x}{3}}\, dx \\ &= -3xe^{-\frac{x}{3}} - 6e^{-\frac{x}{3}} + C,\end{aligned}$$

[1] Qualora si intendesse calcolare solo l'area della regione *finita* di piano delimitata da Γ, l'asse y e la retta $y = 3$, basterá considerare solamente il primo addendo, che verrá calcolato di seguito. Il secondo addendo rimane tuttavia finito, e rappresenta l'area della regione delimitata da Γ e dalla retta $y = 3$ quando $x \geq 1$.

e di conseguenza

$$\int 3 - f(x)\,dx = 3xe^{-\frac{x}{3}} + 6e^{-\frac{x}{3}} + C.$$

Ponendo per semplicità $I(x) = 3xe^{-\frac{x}{3}} + 6e^{-\frac{x}{3}}$, osserviamo che da (4) segue che $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 0$, e dunque

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \int_0^1 3 - f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x) - 3\,dx \\
&= I(1) - I(0) - (\lim_{M\to\infty} I(M) - I(1)) \\
&= 2I(1) - I(0) = 18e^{-\frac{1}{3}} - 6.
\end{aligned}$$

4. Seguendo il suggerimento dato dal testo, proviamo a prendere la funzione g pari ad f. Utilizzando una calcolatrice e arrotondando i risultati a meno di un centesimo abbiamo

$$\begin{aligned}
f(0) &\sim 2,00 \\
f(1) &\sim 3,00 \\
f(2) &\sim 3,51 \\
f(3) &\sim 3,74 \\
f(4) &\sim 3,79 \\
f(5) &\sim 3,76 \\
f(6) &\sim 3,68,
\end{aligned}$$

ove tali espressioni significano che

$$\begin{aligned}
|f(0) - 2,00| &\le 0,01 \\
|f(1) - 3,00| &\le 0,01 \\
|f(2) - 3,51| &\le 0,01 \\
|f(3) - 3,74| &\le 0,01 \\
|f(4) - 3,79| &\le 0,01 \\
|f(5) - 3,76| &\le 0,01 \\
|f(6) - 3,68| &\le 0,01.
\end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
|f(0) - 1,97| &\le |f(0) - 2,00| + |2,00 - 1,97| \le 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}, \\
|f(1) - 3,02| &\le |f(1) - 3,00| + |3,00 - 3,02| \le 0,01 + 0,02 = 0,03 < 10^{-1}, \\
|f(2) - 3,49| &\le |f(2) - 3,51| + |3,51 - 3,49| \le 0,01 + 0,02 = 0,03 < 10^{-1}, \\
|f(3) - 3,71| &\le |f(3) - 3,74| + |3,74 - 3,71| \le 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}, \\
|f(4) - 3,80| &\le |f(4) - 3,79| + |3,79 - 3,80| \le 0,01 + 0,01 = 0,02 < 10^{-1}, \\
|f(5) - 3,76| &\le |f(5) - 3,76| + |3,76 - 3,76| \le 0,01 + 0,00 = 0,01 < 10^{-1}, \\
|f(6) - 3,65| &\le |f(6) - 3,68| + |3,68 - 3,65| \le 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}.
\end{aligned}$$

Ergo la funzione f ha le proprietà richieste.

Dunque, se assumiamo che i profitti siano davvero governati dalla funzione f, dal fatto che $f(x) > 3$ per ogni $x \geq 1$ (come stabilito in (5)), possiamo concludere che i profitti non saranno mai minori di 3 milioni di Euro all'anno.