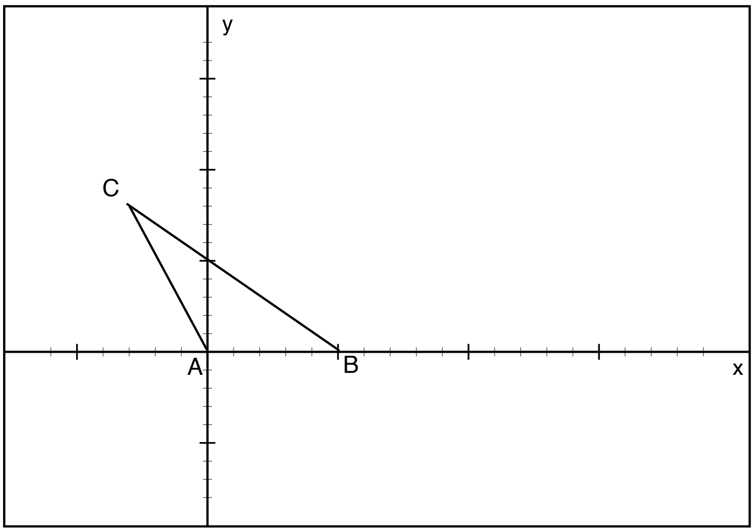
# Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2006/2007

Niccolò Desenzani*  Sunra J.N. Mosconi†

21 giugno 2007

**Problema 1**

1. 


   Fissato un sistema di assi cartesiani come in figura, chiamiamo $\alpha$ l'angolo $C\hat{A}B$, e $\beta$ l'angolo $A\hat{B}C$. Si ha dunque $\alpha = 2\beta$ per ipotesi. Se $C$ ha coordinate $(x, y)$ vale

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan\alpha \\ \frac{y}{1-x} = \tan\beta \end{cases}$$

   Poiché

$$\tan 2\beta = 2\frac{\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

*Elicit
†Politecnico di Milano

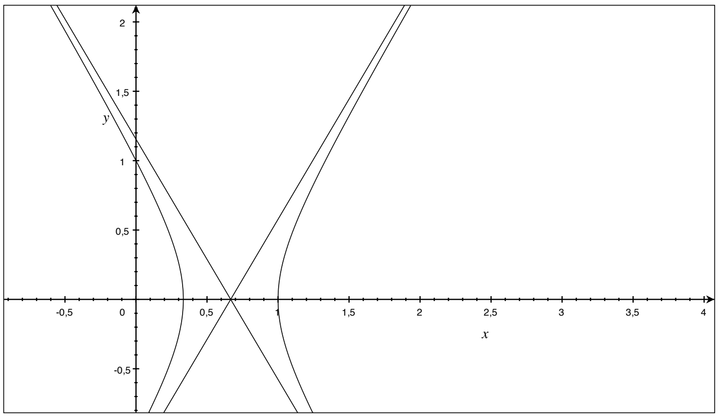
si ha

$$\frac{y}{x} = 2\frac{\frac{y}{1-x}}{1-\left(\frac{y}{1-x}\right)^2}$$

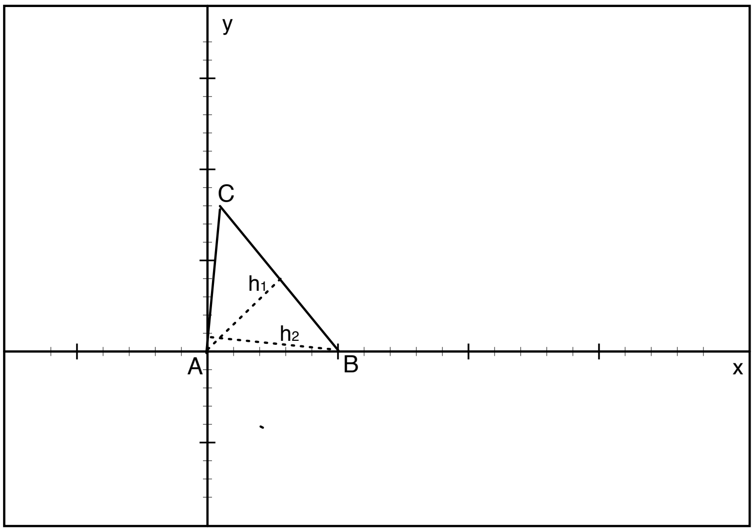
ossia, dopo alcune manipolazioni algebriche

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$$

che è l'equazione di un'iperbole con asintoti $y = \pm\sqrt{3}x \mp \frac{4}{2\sqrt{3}}$.




2. Solo il ramo sinistro dell'iperbole soddisfa alle ipotesi del problema.

3. 


Riferendosi alla figura, chiamiamo le altezze relative ad $AC$ e $BC$

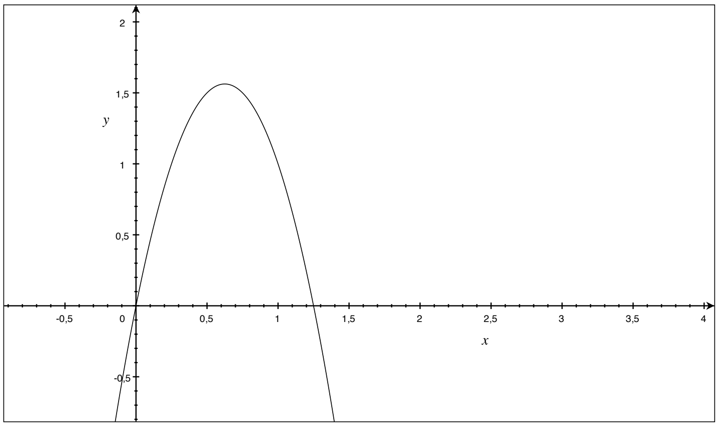
rispettivamente $h_1$ e $h_2$. Poiché $\overline{AB} = 1$ si ha

$$\begin{cases} h_1 = \sin\alpha \\ h_2 = \sin\beta \end{cases}$$

e quindi, ricordando che $\alpha = 2\beta$ e $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

$$h_1^2 + h_2^2 = \sin^2 2\beta + \sin^2\beta = \sin^2\beta(5 - 4\sin^2\beta)$$

Ponendo $\sin^2\beta = t$, dovremo trovare il massimo valore di $t(5-4t)$, che viene assunto per $t = 5/8$.



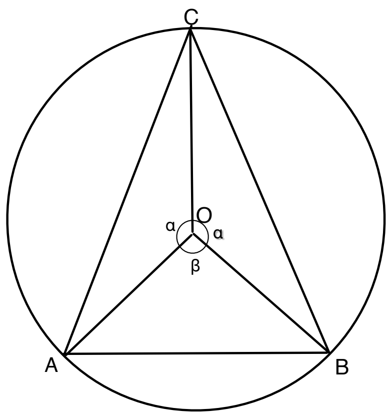

Si ha quindi che l'angolo che massimizza la somma dei quadrati delle altezze deve soddisfare

$$\sin^2\beta = \frac{5}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = \pm\arcsin\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) \simeq \pm(52^\circ\ 14')$$

4. Essendo $\beta = 36°$, si ha che $\alpha = 72°$ e quindi l'angolo $B\hat{C}A$ deve essere anch'esso pari a $72°$. Quindi il triangolo è isoscele e risulta essere un settore del pentagono regolare inscritto nel cerchio unitario. Dalla geometria sintetica sappiamo che il lato del pentagono è in rapporto aureo col raggio del cerchio circoscritto e quindi pari a $(\sqrt{5}-1)/2$.

## Problema 2

1. Sia $ABC$ un triangolo isoscele in $C$ inscritto nella circonferenza unitaria di centro $O$.




Indichiamo con $\alpha$ la misura (in radianti) degli angoli $C\hat{O}B$ e $C\hat{O}A$ e con $\beta$ quella dell'angolo $A\hat{O}B$. Si ha $\beta = 2\pi - 2\alpha$. Osserviamo preliminarmente che deve essere $\pi \geq \alpha \geq \pi/2$. Essendo l'area di un qualsiasi triangolo pari al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, abbiamo

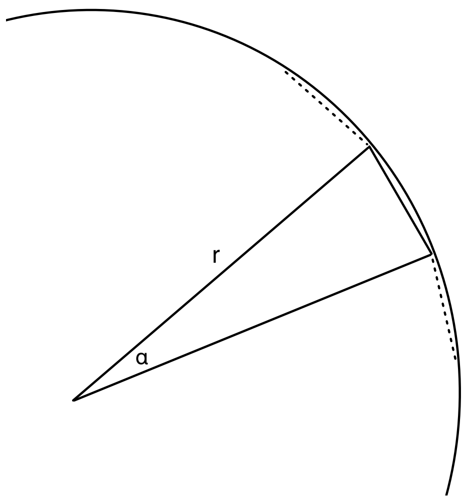
$$\begin{cases} Area(AOC) = Area(COB) = \frac{1}{2}\sin\alpha \\ Area(AOB) = \frac{1}{2}\sin\beta \end{cases}$$

quindi l'area totale $Area(ABC)$ espressa in termini di $\alpha$ è dunque

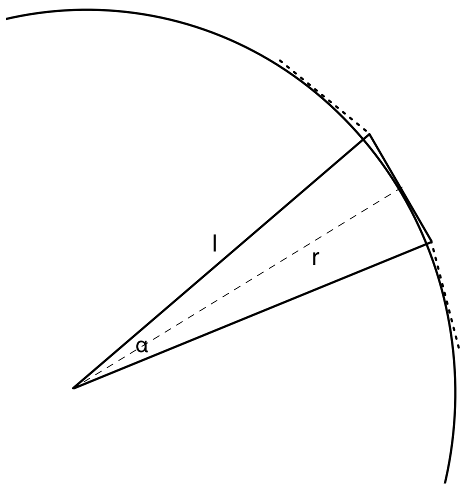
$$Area(ABC) = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta = \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

dove si è utilizzato che $\sin(2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha$. Derivando l'espressione ottenuta si ottiene $\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha$ che si annulla, cambiando di segno, per $\alpha = 2\pi/3$ dove in effetti si ha un massimo. Ma allora $\beta = \alpha = 2\pi/3$ e quindi il triangolo che massimizza l'area è quello equilatero.

2. Il poligono regolare di $n$ lati sarà composto da $n$ triangoli isosceli di angolo al centro pari a $2\pi/n$ e lato $r$. Ciascun triangolo ha dunque area $\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ e la somma delle $n$ aree sarà la quantità richiesta.




L'area del poligono regolare circoscritto si ottiene anch'essa come somma delle aree dei triangoli isosceli di pari angolo al centro, ma i lati $l$ soddisfano ora $r = l \cos \frac{\pi}{n}$.




Quindi l'area totale del poligono circoscritto risulta

$$\frac{n}{2} \frac{r^2}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} \sin \frac{2\pi}{n}.$$

3. Sfruttando un limite notevole si ha

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \pi r^2 \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} = \pi r^2$$

che giustamente coincide con l'area del cerchio.

4. Il problema è quello di costruire, usando solo riga e compasso, un quadrato con la stessa area di un dato cerchio. L'impossibilità di ciò deriva dal fatto che $\pi$ è un numero trascendente.