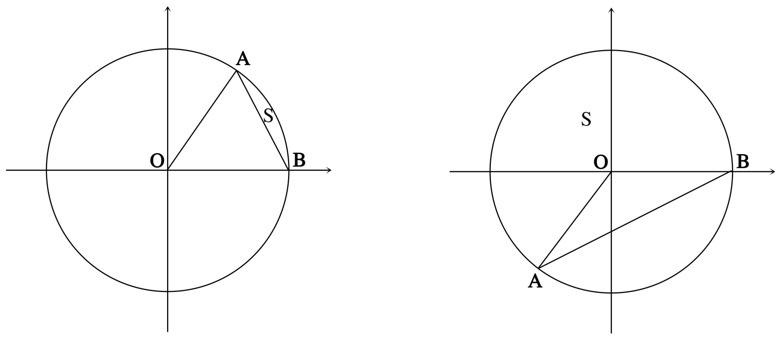
Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2008/2009

Nicola Gigli* Sunra J.N. Mosconi†

26 giugno 2009

Problema 1

1. L'area del settore circolare è pari a $\frac{1}{2}r^2x$. Il triangolo di vertici AOB ha base di lunghezza r e altezza pari a $r|\sin x|$ e quindi la sua area è $\frac{1}{2}r^2|\sin x|$. Nell'intervallo $[0,\pi]$, dove $\sin x \geq 0$, le aree vanno sottratte, mentre in quello $[\pi, 2\pi]$, dove $\sin x \leq 0$ vanno sommate. Vale quindi
$$Area(S(x)) = \frac{1}{2}r^2(x - \text{segno}(\sin x)|\sin x|) = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$$



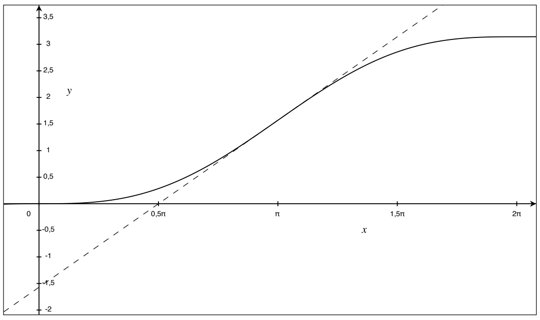
2. Lo studia va effettuato solamente nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Per costruzione è $S(x) \geq 0$ e $S(x) = 0$ solo per $x = 0$. La derivata di $S(x)$ è
$$S'(x) = \frac{1}{2}r^2(1 - \cos x) \geq 0$$
e $S'(x) = 0$ solo quando $\cos x = 1$ ossia per $x = 0$ (per $x = 2\pi$ la funzione non è ben definita ma essa presenta comunque un asintoto

*Università di Bordeaux
†Università di Catania

orizzontale quando $x \to 2\pi^-$). Quindi la funzione è crescente nell'intervallo $[0.2\pi)$ e ha in 0 un punto a tangente orizzontale. La derivata seconda è $S''(x) = \frac{1}{2}r^2 \sin x$ il cui segno è positivo in $(0, \pi)$, negativo in $(\pi, 2\pi)$ e nullo per $x = 0,\ \pi$. La funzione è quindi convessa in $(0, \pi)$, concava in $(\pi, 2\pi)$ ed ha un punto di flesso per $x = \pi$. La tangente nel punto di flesso ha equazione

$$y = \frac{1}{2}r^2(2x - \pi)$$

Riportiamo il grafico della funzione nel caso $r = 1$.



3. Detto $a = 100m^2$ il valore imposto dal testo per l'area del settore circolare, si ha $\frac{1}{2}r^2x = a$. Il perimetro del settore è composto da due raggi di lunghezza r e dall'arco di lunghezza rx e quindi $P = r(2 + x)$. Ottenendo x in funzione di r dalla condizione sull'area si ha $x = \frac{2a}{r^2}$ e perciò
$$P(r) = r(2 + \frac{2a}{r^2}) = 2r + \frac{2a}{r}$$

   Questa funzione ha asintoto verticale in $r = 0$ e tende a $+\infty$ per $r \to 0^+$ e $r \to +\infty$. La derivata di P è $P'(r) = 2 - \frac{2a}{r^2}$ il cui segno è negativo in $(0, \sqrt{a})$, positivo in $(\sqrt{a}, +\infty)$ e nullo in $r = \sqrt{a}$. Essa ha quindi un unico minimo in $\overline{r} = \sqrt{a} = 10m$, che è il valore cercato.

   L'angolo associato si ottiene dalla condizione imposta sull'area, essendo

$$\overline{x} = \frac{2a}{\overline{r}^2} = 2$$

   che in gradi è pari a $\overline{\theta} = \frac{360}{\pi}$, poco meno di 115°.

4. Osserviamo innanzitutto che il punto B ha coordinate $(2, 0)$ mentre l'altezza del triangolo AOB ha piede H di coordinate $(2\cos\frac{\pi}{3}, 0) =$

$(1, 0)$. Chiamiamo $(s, 0)$ un generico punto del segmento OB, per $0 \leq s \leq 2$.

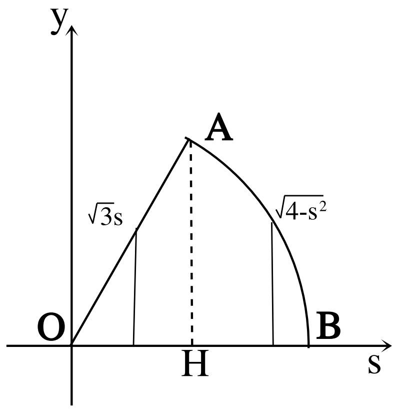
Utilizzando il principio di Cavalieri, per calcolare il volume V del solido, basterà determinare il valore dell'integrale

$$V = \int_0^2 Area(Q(s))ds$$

dove $Q(s)$ è la sezione quadrata del solido con il piano per il punto $(s, 0)$. Il lato di tale quadrato ha due espressioni distinte se $0 \leq s \leq 1$ o $1 \leq s \leq 2$.

Il segmento OA è parte della retta di equazione $y = \tan \frac{\pi}{3} s = \sqrt{3}s$ e quindi per $0 \leq s \leq 1$ il lato del quadrato $Q(s)$ è $\sqrt{3}s$.

L'arco di cerchio AB sta nella circonferenza di equazione $s^2 + y^2 = 4$ e quindi per $1 \leq s \leq 2$ il lato di $Q(s)$ è $\sqrt{4 - s^2}$.

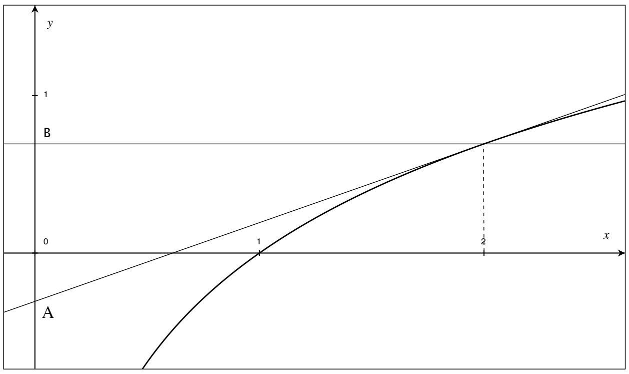


Si ha quindi

$$V = \int_0^1 3s^2 ds + \int_1^2 4 - s^2 ds = 1 + (4 - \frac{7}{3}) = \frac{8}{3}$$

Problema 2

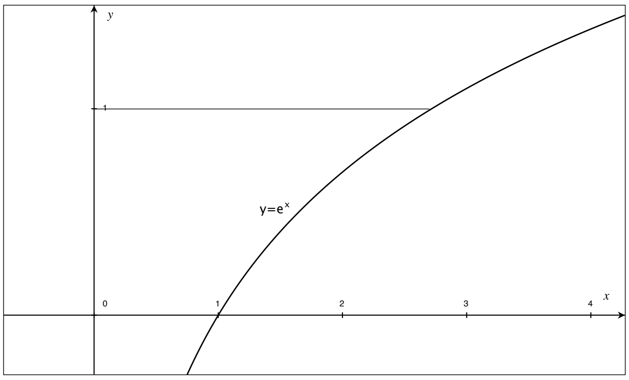
1. La proprietà è valida per qualsiasi $a > 0$ e diverso da 1.



La retta tangente alla funzione $\log_a x$ nel generico punto x_0 ha equazione
$$y = \log_a x_0 + \frac{\log_a e}{x_0}(x - x_0)$$
e quindi intercetta l'asse y nel punto $A = (0, \log_a x_0 - \log_a e)$. Il punto B ha coordinate $(0, \log_a x_0)$. La distanza fra i due punti è pari a
$$|\overline{AB}| = |(\log_a x_0 - \log_a e) - \log_a x_0| = |\log_a e|$$
che non dipende dal punto x_0.

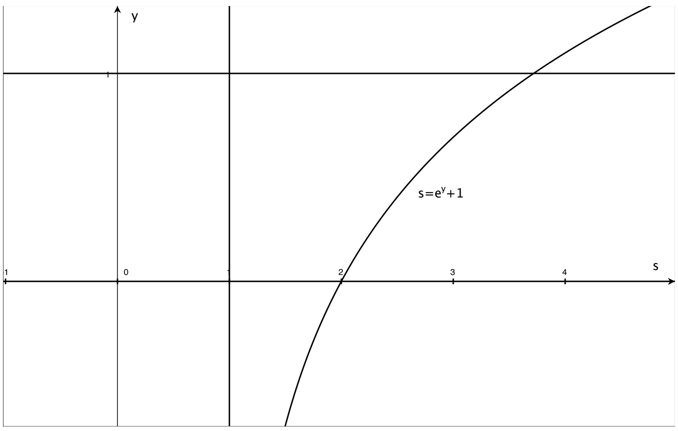
2. Nel punto di ascissa 1 la retta tangente ha equazione
$$y = (x - 1)\log_a e$$
La pendenza è $45°$ quando il coefficiente angolare è $\tan 45° = 1$, e quindi per
$$\log_a e = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = e$$
La pendenza è $135°$ quando il coefficiente angolare è $\tan 135° = -1$, e quindi per
$$\log_a e = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{1}{e}$$

3. Il grafico G_f ha equazione $y = \log x$ o, equivalentemente, $x = e^y$. Invertendo gli assi coordinati l'area non cambia e quindi per il calcolo si può effettuare l'integrazione con y come variabile indipentende. Essa è pari a
$$Area = \int_0^1 e^y dy = e - 1$$



4. Occorre utilizzare la formula di Pappo per il volume dei solidi di rotazione. Trasliamo l'asse y a sinistra di una unità (lasciando quindi inalterato il volume), considerando la nuova variabile $s = x + 1$. L'equazione di G_f in queste variabili è

$$x = e^y \qquad \Leftrightarrow \qquad s = e^y + 1$$



Detta S la regione del piano sy delimitata dalle rette $y = 1$, $y = 0$, e dal grafico delle due funzioni $f(y) = e^y + 1$ e $g(y) = 1$, il volume V ottenuto mediante la rotazione di S attorno all'asse $s = 0$ è pari a

$$V = \int_0^1 \pi(f^2(y) - g^2(y))dy = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 - 1dy = \pi(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2}).$$

Riportiamo di seguito la figura del solido in questione.