Soluzione del secondo problema della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Nicola Gigli [*] Sun-Ra Mosconi [†]

23 giugno 2010

Problema 2

Punto 1 Osserviamo innanzitutto che G_b sta sempre nel semispazio delle ordinate positive e tutti i grafici passano per $(0,1)$. A b fissato possiamo studiare la funzione $f(x) = b^x$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1; \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1, \end{cases}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < b < 1; \\ 0 & \text{se } b > 1. \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate:

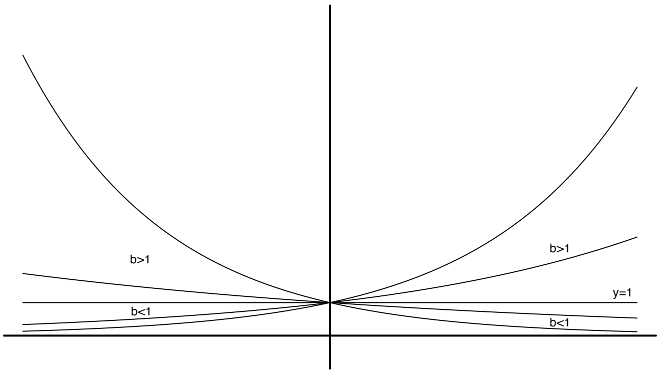
$$f'(x) = \log(b) \cdot b^x,$$
$$f''(x) = \big(\log(b)\big)^2 b^x,$$

deducendone che f è crescente per $b > 1$, decrescente per $0 < b < 1$ e sempre convessa. Poiché

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

abbiamo che $(x, y) \in G_{1/b}$ se e solo se $(-x, y) \in G_b$, ossia il grafico $G_{1/b}$ è la riflessione attorno all'asse y del grafico G_b.

[*]Università di Bonn
[†]Università di Catania



Derivando rispetto a b si ha

$$\frac{d}{db}b^x = xb^{x-1}$$

e quindi per $x > 0$ i grafici G_b sono decrescenti ad x fissato, mentre per $x < 0$ sono crescenti. Inoltre, per ogni $x \neq 0$

$$\lim_{b\to 1} b^x = 1,$$

$$\lim_{b\to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{b\to 0^+} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0; \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi in definitiva:

- per b che tende a 1^+ i grafici G_b decrescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre crescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative.

- per b che tende a 1^- i grafici G_b crescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre decrescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a 0^+ i grafici G_b decrescono a zero nel semiasse delle ascisse positive, e crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a $+\infty$ i grafici G_b crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse positive, e decrescono a 0 nel semiasse delle ascisse negative,

Punto 2 Un generico punto P di G_b si può scrivere come (x_0, b^{x_0}) per un qualche numero reale x_0.
La retta parallela all'asse y e passante per (x_0, b^{x_0}) interseca l'asse delle ascisse, chiaramente, in x_0. Dunque $A = (x_0, 0)$
Per identificare B, ricordiamo che la derivata di $f(x) = b^x$ è data da $f'(x) = \log(b)b^x$. L'equazione della retta tangente a G_b in (x_0, b^{x_0}) è quindi data da

$$y = \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}.$$

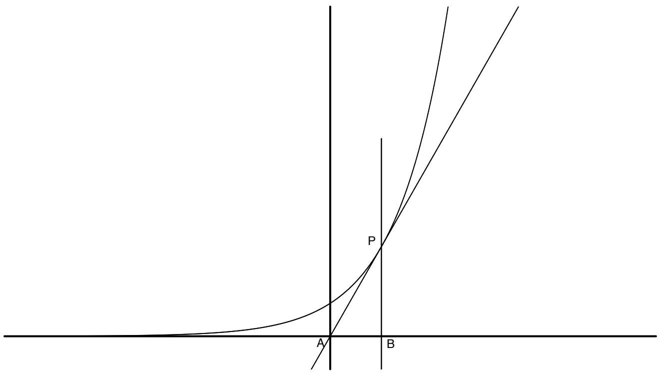
Per calcolare il punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse poniamo $y = 0$ nell'equazione e risolviamo in x:

$$\begin{aligned}
0 &= \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}, \\
0 &= b^{x_0}\big(\log(b)(x - x_0) + 1\big), \\
0 &= \log(b)(x - x_0) + 1, \\
x &= -\frac{1}{\log(b)} + x_0,
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che $b^{x_0} \neq 0$. Dunque $B = (-\frac{1}{\log(b)} + x_0, 0)$.
Ne deduciamo che

$$\overline{AB} = \left| x_0 - \left(-\frac{1}{\log(b)} + x_0 \right) \right| = \left| \frac{1}{\log(b)} \right|,$$

e quindi la distanza tra A e B non dipende da P, come richiesto.



Tale distanza è uguale a 1 se e solo se $\left|\frac{1}{\log(b)}\right| = 1$, ovvero se e solo se una delle seguenti due equazioni è soddisfatta:

$$\begin{aligned}
\log(b) &= 1, \\
\log(b) &= -1.
\end{aligned}$$

La prima di esse ha soluzione $b = e$, la seconda $b = \frac{1}{e}$. Questi sono gli unici valori di b per cui $\overline{AB} = 1$.

Punto 3 Per prima cosa determiniamo la retta r. Sia x_0 un generico numero reale. Allora poiché la derivata di e^x in x_0 è e^{x_0}, l'equazione della retta tangente a G_e in (x_0, e^{x_0}) è data da

$$y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}.$$

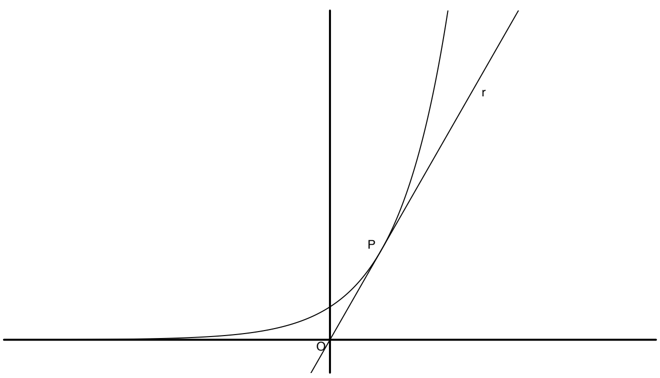
Dobbiamo trovare x_0 in maniera che tale retta passi per l'origine. Ponendo dunque $x = y = 0$ nell'equazione sopra otteniamo

$$0 = -x_0 e^{x_0} + e^{x_0},$$

poiché $e^{x_0} \neq 0$ possiamo semplificare ed ottenere $0 = -x_0 + 1$ ovvero $x_0 = 1$. Dunque esiste una sola retta passante per l'origine e tangente a G_e: la retta di equazione

$$y = e(x - 1) + e.$$

L'angolo che tale retta forma col semiasse positivo delle ascisse è dato - in generale - dall'arcotangente del coefficiente angolare; dunque in questo caso esso vale $\arctan(e)$.



Punto 4 La retta $y = e$ interseca G_e nel punto $(1, e)$. L'area cercata può quindi essere calcolata come differenza delle aree:

- del rettangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, e), (0, e)$,
- dell'area sotto G_e compresa tra l'asse delle ascisse e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

L'area del rettangolo è pari ad e. Quella della regione sotto il grafico si calcola come:

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Dunque il valore cercato è:

$$e - (e - 1) = 1.$$