Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2006/2007

Niccolò Desenzani* Sunra J.N. Mosconi†

22 giugno 2007

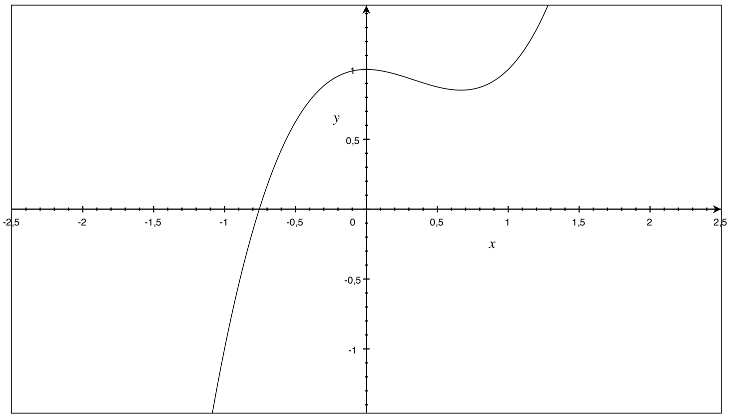
1. Chiamiamo A_t l'area della sezione del solido col piano perpendicolare all'asse delle x in $x = t$. Essendo la sezione stessa un triangolo equilatero di lato $2\sqrt{t}$ e quindi di area $\sqrt{3}/4$ volte il quadrato del lato, si ha
$$A_t = \sqrt{3}t$$
e integrando per t compreso fra 0 e 1 si ottiene il volume:
$$\int_0^1 \sqrt{3}tdt = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Chiamiamo a, b e c rispettivamente i lati di lunghezza 40, 60 e 80 e i rispettivi angoli opposti α, β e γ. Applicando ciclicamente il teorema di Carnot si ha
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$
da cui inserendo i dati e risolvendo nel coseno, si ottiene
$$\begin{cases} \cos\alpha = 0,875 \Rightarrow \alpha \simeq 28°57' \\ \cos\beta = 0,6875 \Rightarrow \beta \simeq 46°34' \\ \cos\gamma = -0,25 \Rightarrow \gamma \simeq 104°29' \end{cases}$$

3. Calcolando la derivata si ottiene $f'(x) = 3x^2 - 2x$, che ha segno negativo se e solo se $x \in (0, 2/3)$. Quindi si ha un massimo locale in 0 e un minimo locale in 2/3. Allora si avrà

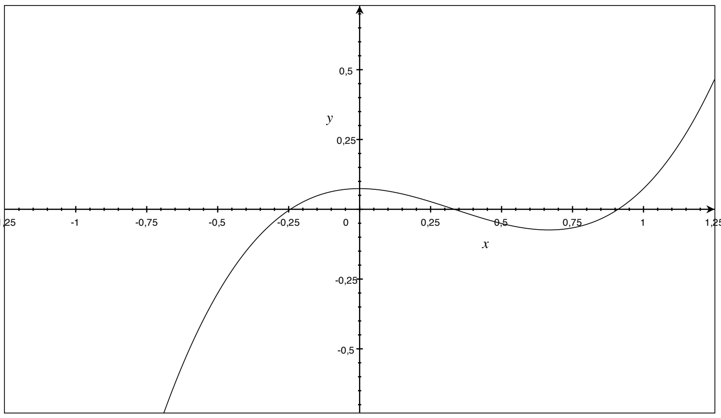
*Elicit
†Politecnico di Milano

(a) Una sola soluzione se il massimo locale è negativo. Ciò avviene se $-k+1<0$ ossia $k>1$



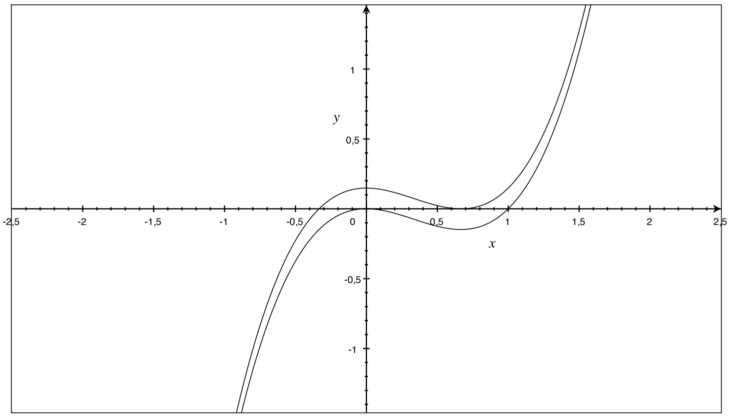
(b) Tre soluzioni se il massimo è positivo e il minimo negativo. Ciò avviene se

$$\begin{cases} -k+1>0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-k+1<0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{23}{27}<k<1$$



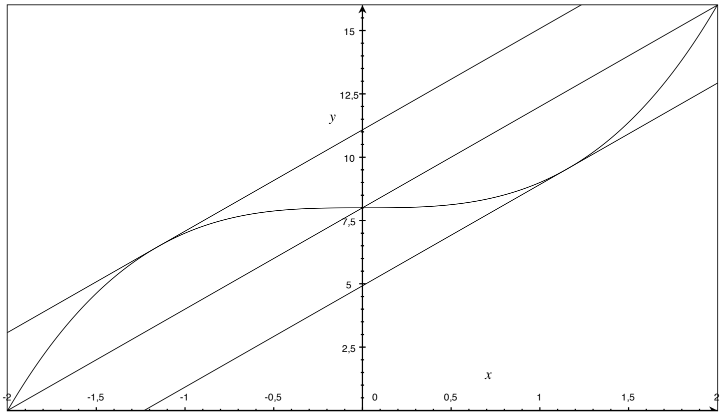
(c) Due sole soluzioni (o tre soluzioni di cui due coincidenti) se il minimo o il massimo sono nulli, ossia rispettivamente se

$$\begin{cases} -k+1=0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-k+1=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad k=1,\ k=\frac{23}{27}$$



4. Sia h l'altezza del cono. Essendo il cono retto e l'apotema unitario, si ha che $r = \sqrt{1-h^2}$. Il volume di un cono retto è un terzo dell'area di base per l'altezza e quindi detto Vol_h il volume del cono in questione si ha
$$Vol_h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(1-h^2)h.$$
Calcolando la derivata si ottiene
$$\frac{\pi}{3}(1-3h^2)$$
che ha segno positivo solo per $-1/\sqrt{3} < h < 1/\sqrt{3}$. Poichè ha senso considerare solo $1 > h > 0$, si ha un massimo per $h = 1/\sqrt{3}$, che fornisce il volume massimo Vol_{max} pari a
$$Vol_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} m^3,$$
che corrisponde ad una capacità di
$$\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}\ l \simeq 403\ l$$

5. La funzione è continua in $[-2,2]$ e differenziabile in $(-2,2)$. Quindi il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = x^3+8$, e la sua tesi afferma l'esistenza di un punto c, con $a < c < b$ tale che
$$\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = f'(c) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 = 3c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$
Il significato geometrico del teorema consiste nell'osservare che la secante è parallela alla tangente a f in almeno un punto intermedio, e nel caso di specie di punti con tale proprietà ve ne sono due.



6. Il prezzo finale non dipenderà dall'ordine in cui il prezzo è variato. In ogni caso si otterrà un prezzo inferiore di un fattore
$$(1+\frac{6}{100})(1-\frac{6}{100}) = (1-\frac{0,36}{100})$$
ossia una diminuzione dello $0,36\%$.

7. L'integrale della funzione sarà nullo. Per l'additività dell'integrale
$$\int_{-2}^{2}(f(x)+3)dx = 0 + \int_{-2}^{2} 3dx = 12$$

8. Espandendo i coefficienti binomiali in base alla formula
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots 2}{k(k-1)\dots 2(n-k)(n-k-1)\dots 2}$$
si ha
$$4\frac{n(n-1)\dots 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot (n-4)(n-5)\dots 2} = \frac{(n-2)(n-3)\dots 2}{3\cdot 2\cdot (n-5)(n-6)\dots 2}$$
e semplificando i termini uguali si perviene all'equazione
$$n(n-1) = 15(n-4)$$
che ha soluzioni $n = 6$ e $n = 10$.

9. Essendo la funzione pari, ci basta effettuare l'integrazione per $x \in [0,1]$ Effettuiamo il cambio di variabile $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 t dt$$

Sommando e sottraendo 1/2 si ha

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int (1 - 2\cos^2 t) dt$$

e ricordando la formula di bisezione $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ si ha infine

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2}$$

Ricordando la sostituzione e la formula di duplicazione del seno $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ si ottiene

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}),$$

valida per $0 \leq x < 1$, mentre per $-1 < x < 0$ si otterrà per parità

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2})$$

L'integrale definito viene calcolato mediante la primitiva e risulta

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = -\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

valore che ovviamente coincide con il significato geometrico dell'area del settore di cerchio unitario nel primo quadrante.

10. Considerando la simmetria della sfera rispetto all'asse di rotazione si possono introdurre due coordinate di natura angolare: una descriverà l'angolo che la proiezione sul piano equatoriale di un punto sulla superficie terrestre forma con un meridiano fissato (nel nostro caso quello di Greenwich). L'altra descriverà l'angolo che il punto sulla superficie terrestre forma col piano equatoriale. In questo modo tutti i punti sulla terra risultano identificati mediante i due angoli, ad eccezione dei soli poli.