Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2010/2011

Nicola Gigli *   Sun-Ra Mosconi †

23 giugno 2011

Quesito n.1
Sia h la metà dell'altezza del cilindro, b il raggio della base e indichiamo con $r = 6$ dm il raggio della sfera contenente il serbatoio. Il volume del cilindro è pari a $2\pi hb^2$, mentre affinché il cilindro sia inscritto nella sfera deve valere, per il teorema di Pitagora,

$$h^2 + b^2 = r^2.$$

Risolvendo in b^2 ed inserendo nella formula del volume, si ha che occorre massimizzare la quantità

$$V(h) = 2\pi h(r^2 - h^2).$$

per $h \geq 0$. Il segno di V è positivo solo per $h \in (0, r)$ (nel semiasse $h \geq 0$), e la sua derivata è $V'(h) = 2\pi(r^2 - 3h^2)$, che ha segno positivo in $(0, \frac{r}{\sqrt{3}})$ e negativo in $(\frac{r}{\sqrt{3}}, +\infty)$. Il massimo si trova quindi per $h = \frac{r}{\sqrt{3}}$, che fornisce il volume

$$V(\frac{r}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{9}\pi\sqrt{3}r^3 \simeq 522 \text{ dm}^3 = 522 \text{ litri}.$$

Quesito n.2
Osserviamo innanzitutto che deve essere $x \geq 0$. La distanza al quadrato fra $P = (x, \sqrt{x})$ e $Q = (4, 0)$ è data da

$$\overline{PQ}^2 = (x-4)^2 + x = x^2 - 7x + 16.$$

Il vertice della parabola ha ascissa $x = \frac{7}{2}$ (che è ammissibile in quanto positivo) che minimizza $\overline{PQ}^2$ e quindi $\overline{PQ}$. Il punto di minima distanza è quindi $(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}})$.

*Università di Nizza
†Università di Catania

Quesito n.3
Osserviamo che la regione R può essere descritta come

$$R := \{(x, y) : 0 \leq y \leq 8, \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}.$$

Il volume del solido di rotazione attorno all'asse y si ottiene mediante il principio di Cavalieri:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^8 \pi(2^2 - \sqrt[3]{y}^2)dy = 8 \cdot 4\pi - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy \\ &= 32\pi - \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8 = \pi \frac{64}{5} \simeq 40,21 \end{aligned}$$

Quesito n.4
Il numero di combinazioni di n oggetti presi k a k è dato da

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

(in mancanza di specifiche da parte del testo, stiamo assumendo che gli n oggetti siano distinti). Il problema chiede quindi di trovare per quali n si ha

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Semplificando (operazione ammissibile, perché n deve essere ≥ 4 affinché il problema abbia senso) si ottiene

$$\frac{n-3}{4} = 1,$$

ovvero $n = 7$.

Quesito n.5
Il problema richiede di calcolare l'integrale

$$\int_1^2 |\cos x|\, dx.$$

Poiché la funzione cos è non-negativa nell'intervallo $[1, \frac{\pi}{2}]$ e non-positiva nell'intervallo $[\frac{\pi}{2}, 2]$, il problema si riduce al seguente calcolo:

$$\int_1^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^2 \cos x\, dx = [\mathrm{sen} x]_1^{\pi/2} - [\mathrm{sen} x]_{\pi/2}^2 = 2 - \mathrm{sen}2 - \mathrm{sen}1,$$

ed il risultato è uguale a circa $0,25$.

Quesito n.6
Il problema si pone per a nel dominio della funzione tangente, ovvero $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Per tali a vale, per definizione:

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}a}{x - a} = \mathrm{tg}'a.$$

Ricordando la formula

$$\mathrm{tg}'a = \frac{1}{\cos^2 a},$$

ne deduciamo che il limite richiesto è uguale a $\frac{1}{\cos^2 a}$ per ogni $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Quesito n.7
Poniamo $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$. Osserviamo che f è continua in tutto $\mathbb{R}$, che $f(-1) = -1 - 2011 + 12 < 0$ e che $f(0) = 12 > 0$. Quindi dal teorema di Bolzano (o degli zeri) sappiamo che esiste $x \in [-1, 0]$ tale che $f(x) = 0$. Per dimostrare che tale x è unico, osserviamo che la derivata di f è data da

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011.$$

Poiché $x^{2010} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ne deduciamo che $f'(x) \geq 2011 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ora, se f avesse due zeri, allora dal teorema di Rolle avremmo l'esistenza di un punto dove la derivata si annulla. Ma poiché la derivata è ovunque strettamente positiva, questo non è possibile. Ergo f ha un solo zero e, per quanto abbiamo visto, tale zero giace in $[-1, 0]$.

Quesito n.8
Il problema della quadratura del cerchio è un problema classico di geometria posto dagli antichi greci. Esso chiede di costruire con il solo utilizzo di riga e compasso un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio assegnato.
Il problema rimase senza soluzione per secoli, fino a quando nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann dimostrò la trascendenza di π, una cui conseguenza è che il problema della quadratura del cerchio è irresolubile. Il fatto che una soluzione sia stata cercata senza successo per così tanto tempo, ha fatto entrare la locuzione 'quadratura del cerchio' nel linguaggio comune con due accezioni. In una, dicendo che si sta cercando la quadratura del cerchio, si vuol dire che si sta cercando di fare qualcosa di impossibile, vano. Nell'altra, dicendo che si è trovata la quadratura del cerchio, si indica l'aver trovato la soluzione perfetta ad un problema arduo.

Quesito n.9
Sia π il piano contenente i vertici del triangolo, chiamati A, B, C, A essendo il vertice dove l'angolo è retto. Affermiamo che un punto P dello spazio è equidistante da A, B, C se e solo se la sua proiezione Q su π è equidistante da A, B, C. Infatti, per costruzione, la retta passante per Q e A è ortogonale alla retta passante per P e Q. Quindi il triangolo PQA è rettangolo in Q, e dunque dal teorema di Pitagora abbiamo

$$\overline{PA}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QA}^2.$$

Ugualmente, i triangoli PQB e PQC sono rettangoli in Q, e dunque vale

$$\overline{PB}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QB}^2,$$
$$\overline{PC}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2.$$

È quindi evidente che $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ se e solo se $\overline{QA} = \overline{QB} = \overline{QC}$.
Quindi per concludere è sufficiente dimostrare che c'è un unico punto di π ad ugual distanza da A, B, C, dato dal punto medio di BC. A questo fine, ricordiamo che dato un qualunque triangolo, esiste ed è unico il punto equidistante dai vertici: il circocentro.
Il nostro scopo è dunque mostrare che il circocentro è il punto medio di BC. Ciò segue dal fatto che ABC è rettangolo in A. Infatti una conseguenza del teorema degli angoli al centro ed alla circonferenza è che il segmento BC è un diametro della circonferenza circoscritta al triangolo. Quindi il suo punto medio è il centro di tale circonferenza, e dunque è equidistante da tutti i punti della circonferenza stessa. Poiché A, B, C sono 3 di questi punti, la tesi è dimostrata.

Quesito n.10
L'unica risposta corretta è la (D).
Per mostrare che (D) è corretta, dobbiamo mostrare che la derivata della funzione III è la funzione II, e che la derivata di II è I.
Per mostrare che la derivata di III è II, osserviamo che nelle regioni dove III è crescente, II è positiva, e viceversa dove III è decrescente la II è negativa. Si nota inoltre che dove la pendenza (con segno) di III è maggiore il valore di II è maggiore.
Il fatto che I sia la derivata di II segue da argomenti analoghi. Infatti I è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$, che sono esattamente le regioni dove II è, rispettivamente, decrescente e crescente. Si osserva anche in questo caso che dove I è maggiore, maggiore è la pendenza (con segno) di II.
Per escludere le altre risposte, osserviamo che nessuna funzione è ovunque positiva, il che esclude che la derivata di I sia uno dei grafici mostrati. Ergo I

deve apparire nella colonna f'', il che lascia le sole possibilità (C) e (D). Per escludere (C), basta osservare che la derivata di III non può essere I, perché III non è decrescente nell'insieme delle x negative (dove I è negativa).